Décomposition de Dantzig-Wolfe

MPRO – CORO – ENSIIE

Alain Faye

Sommaire

- Problème (P) en nombres entiers + contraintes couplantes
- Problème (M) : écriture en extension de (P)
- Problème (ML) : relaxation continue de (M)
- Résolution de (ML) : problème maître et sous-problème
- Minorants de la valeur de (P)
- Branch-and-Price
- Méthode de stabilisation de Wentges

Problème (P) en nombres entiers et sa formulation en « extension » (M)

Problème linéaire en nombres entiers (P)

Matrice des contraintes diagonale par blocs (jaunes) + contraintes couplantes

c^1x^1 +	c^2x^2 +	…	…	c^Kx^K	←Objectif	
A^1x^1 +	A^2x^2 +	…	…	A^Kx^K	$\geq a$	Contraintes couplantes
B^1x^1					$\geq b^1$	
	B^2x^2				$\geq b^2$	
		…				
			…			
				B^Kx^K	$\geq b^K$	

x^k vecteur-colonne de m_k entiers pour k=1 à K

Problème linéaire en nombres entiers (P)

Matrice des contraintes diagonale par blocs (jaunes) + contraintes couplantes

c^1x^1 +	c^2x^2 +	…	…	c^Kx^K	←Objectif	
A^1x^1 +	A^2x^2 +	…	…	A^Kx^K	$\geq a$	Contraintes couplantes
B^1x^1					$\geq b^1$	
	B^2x^2				$\geq b^2$	
		…				
			…			
				B^Kx^K	$\geq b^K$	

On définit:

$$X^k = \{x^k \in Z^{m_k} \colon B^k x^k \geq b^k\}$$

$$c = \begin{pmatrix} c^1 & \cdots & c^K \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} A^1 & \cdots & A^K \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^K \end{pmatrix}$$

Réécriture condensée de (P)

On garde l'**objectif** + les **contraintes couplantes**

les **contraintes bloc-diagonales** sont prises en compte dans les X^k

$$\min \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \boldsymbol{Ax \geq a} \\ x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^K \end{pmatrix} \; ; \; x^k \in X^k \subset Z^{m_k} \quad k = 1, \dots, K \end{cases}$$

Hypothèse: X^k a un nombre fini de points pour chaque k=1,…,K

$$|X^k| = n_k \quad k = 1, \dots, K$$

Formulation du problème en extension

On numérote les points de X^k $(\forall k=1,\ldots,K)$

$$X^k = \{\chi_1^k, \ldots, \chi_{n_k}^k\}$$

On définit X comme produit cartésien des X^k et on considère les points de X

$$\chi_i = \left(\chi_{i_1}^1 \ \ \chi_{i_2}^2 \ldots \ \chi_{i_K}^K\right)^t \in X = \prod_{k=1}^{K} X^k$$

Nombre d'éléments de X

$$I = |X| = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_K$$

On numérote les points de X de 1 à *I*

Comment sélectionner (choisir) un point de X ?

On introduit les variables booléennes λ_i i=1 à *I*
λ_i =1 $\Leftrightarrow$ on choisit χ_i

On ne choisit qu'un seul χ_i

$$\sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1$$

Finalement la variable *x* de (P) peut s'écrire

$$x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \chi_i$$

Le problème (P) se réécrit en fonction de λ

Problème (M): on a posé $x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \chi_i$

$$\min_{\lambda} \sum_{i=1}^{I} \lambda_i (c\chi_i) \quad s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{I} \lambda_i (A\chi_i) \geq a \\ \sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1 \quad (convexit\acute{e}) \\ \lambda_i \in \{0,1\} \; i = 1, \dots, I \end{cases}$$

(M) ⇔ (P)

(ML) relaxation continue du problème (M)

Relaxation continue du problème (M)

Problème (ML)

$$\min_{\lambda} \sum_{i=1}^{I} \lambda_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c}\chi_{\boldsymbol{i}}) \;\; s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{I}} \lambda_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{A}\chi_{\boldsymbol{i}}) \geq \boldsymbol{a} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1 \quad (convexité) \\ \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, I \end{cases}$$

Relaxation

Relaxation continue du problème (M)

Problème (ML)

$$\min_{\lambda} \boldsymbol{c} \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \chi_{\boldsymbol{i}} \quad s.c. \begin{cases} \boldsymbol{A} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{I}} \lambda_i \chi_i \geq \boldsymbol{a} \\ \sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1 \quad (convexité) \\ \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, I \end{cases}$$

$\longleftarrow$ Relaxation

Relaxation continue du problème (M)

Problème (ML)

$$\min_{\lambda} \boldsymbol{c} \sum_{i=1}^{I} \lambda_{\boldsymbol{i}} \chi_{\boldsymbol{i}} \quad s.c. \begin{cases} \boldsymbol{A} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{I}} \lambda_i \chi_i \geq \boldsymbol{a} \\ \sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1 \quad (convexité) \\ \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, I \end{cases}$$

Relaxation

Posons $x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_{\boldsymbol{i}} \chi_{\boldsymbol{i}}$

Relaxation continue du problème (M)

Problème (ML): on a posé $x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_{\boldsymbol{i}} \chi_{\boldsymbol{i}}$

$$\min_x \boldsymbol{cx} \quad s.c. \begin{cases} \boldsymbol{Ax \geq a} \\ x \in Conv(X) \end{cases}$$

Avec $X = X^1 \times \ldots \times X^K$
Et $X^k = \{x^k \in Z^{m_k} \colon B^k x^k \geq b^k\}$

$\boxed{\text{On optimise sur les } x \in \text{Conv}(X)}$

Résolution de (ML) la relaxation continue de (M) par algorithme du simplexe

Résolution de (ML) par l'algorithme du simplexe

On considère (ML) la relaxation continue de (M)

On relâche λ_i booléen en $\lambda_i \geq 0 \ \forall i=1,\ldots,I$

On résout (ML) par l'algorithme du simplexe

$$vecteur\ (ligne)\ \boldsymbol{\mu} = \ variables\ duales\ des\ contraintes \sum_{i=1}^{I} \lambda_i (A\chi_i) \geq a$$

$$\eta = variable\ duale\ de\ la\ contrainte\ de\ convexité\ \textstyle\sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1$$

Résolution de (ML) par l'algorithme du simplexe

On considère (ML) la relaxation continue de (M)

On relâche λ_i booléen en $\lambda_i \geq 0 \ \forall i=1,\ldots,I$

On résout (ML) par l'algorithme du simplexe

$$vecteur\ (ligne)\ \boldsymbol{\mu} = \ variables\ duales\ des\ contraintes \sum_{i=1}^{I} \lambda_i (A\chi_i) \geq a$$

$$\eta = variable\ duale\ de\ la\ contrainte\ de\ convexité\ \textstyle\sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1$$

- Coût réduit d'une variable λ_i

$$c\chi_i - \mu A\chi_i - \eta$$

- Recherche de la variable λ_i de coût réduit min (1er critère de Dantzig)

$$\min_{i=1,\ldots,I} c\chi_i - \mu A\chi_i - \eta = \min_{\chi_i \in X} c\chi_i - \mu A\chi_i - \eta$$

Sous-problème: recherche la variable λ_i de coût réduit min

1er critère de Dantzig:
l'algorithme du simplexe fait rentrer en base une variable de coût réduit minimum

Sous-problème = recherche d'une variable λ_i de coût réduit minimum

$$cred = \min_{\chi_i \in X} c\chi_i - \mu A \chi_i - \eta$$

Le sous-problème se décompose en K sous-problèmes indépendants

$$cred = \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in X^k} \left(c^k x^k - \mu A^k x^k\right) - \eta$$

Cela est dû à la disparition des contraintes couplantes

Conférer la page suivante

Le sous-problème se décompose en K sous-problèmes indépendants

$$\chi_i = \left(x^1{}_{i_1} \;\; x^2{}_{i_2} \;\ldots\;\; x^K{}_{i_K}\right)^t \text{ avec } x^k{}_{i_k} \in X^k \;\; k = 1, \ldots, K$$

$$c\chi_i - \mu A\chi_i = \sum_{k=1}^{K} c^k x^k{}_{i_k} - \mu \sum_{k=1}^{K} A^k x^k{}_{i_k} = \sum_{k=1}^{K} \left(c^k x^k{}_{i_k} - \mu A^k x^k{}_{i_k}\right)$$

$$\min_{\chi_i \in X} c\chi_i - \mu A\chi_i - \eta = \min_{\substack{i_k=1,\ldots,n_k \\ k=1,\ldots,K}} \sum_{k=1}^{K} \left(c^k x^k{}_{i_k} - \mu A^k x^k{}_{i_k}\right) - \eta =$$

$$\sum_{k=1}^{K} \min_{i_k=1,\ldots,n_k} \left(c^k x^k{}_{i_k} - \mu A^k x^k{}_{i_k}\right) - \eta = \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in X^k} \left(c^k x^k - \mu A^k x^k\right) - \eta$$

Résolution pratique de (ML)
algorithme de génération de colonnes

Algorithme de génération de colonnes

On introduit au fur et à mesure les colonnes (les variables λ_i) de (ML)

La colonne que l'on introduit à une itération est la variable λ_i de coût réduit min

Si le coût réduit min est ≥ 0 on s'arrête car on a résolu (ML)

(MLR) est le problème (ML) restreint (il n'a pas toutes les colonnes)

A chaque itération on résout (MLR)

Algorithme de génération de colonnes

On démarre avec un sous-ensemble de colonnes $I_0 \subset \{1,\ldots,I\}$, t=0

1. On résout (MLR)

$$\min_{\lambda} \sum_{i \in I_t} \lambda_i (c\chi_i) \;\; s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{i \in I_t} \lambda_i (A\chi_i) \geq a \;\; , \sum_{i \in I_t} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \;\geq 0 \qquad \forall i \in I_t \end{cases}$$

Soit μ,$\boldsymbol{\eta}$ les variables duales obtenues

2. On calcule $cred = \min\limits_{\chi_i \in X} \; c\chi_i - \mu A\chi_i - \eta$ (sous-problème μ,$\boldsymbol{\eta}$ fixés)

Si *cred*<0 alors

Soit $\chi_{i^*} = \operatorname*{argmin}\limits_{\chi_i \in X} \; c\chi_i - \mu A \chi_i - \eta$, $I_{t+1}=I_t \cup \{i^*\}$ (ajout de la col. λ_{i^*})

$t \leftarrow t+1$ et aller en 1.

Sinon STOP (ML) est résolu

Encadrement de la valeur de (ML) à une itération *t* quelconque

à une itération *t* donnée soit μ, $\boldsymbol{\eta}$ les variables duales de (MLR)

On note *cred* = le coût réduit minimum que le sous-problème a trouvé

A une itération de l'algorithme de génération de colonnes,
on a l'encadrement de la valeur de (ML) suivant:

$$\boxed{\mu a + \eta \geq valeur\ de\ (ML) \geq cred + \mu a + \eta}$$

Etude de minorants de la valeur de (P) relaxation lagrangienne

Minorant de la valeur de (P): relaxation lagrangienne

On relâche les contraintes couplantes de (P) et via des multiplicateurs $\mu \geq 0$ on les introduit dans l'objectif de (P). Ce qui donne :

$$\min_{x \in X} cx - \mu(Ax - a)$$

Cette valeur dépend de μ. On la note $\theta(\mu)$:

$$\theta(\mu) = \min_{x \in X} cx - \mu(Ax - a)$$

θ est la fonction duale.

Remarquer que $\forall x$ satisfaisant les contraintes de (P), la quantité rajoutée à l'objectif de (P) est négative ou nulle.
D'où :

$$\text{la valeur de (P)} \geq \theta(\mu) \quad \forall \mu \geq 0$$

Le problème dual lagrangien (D) est :

$$\max_{\mu \geq 0} \theta(\mu)$$

Lien avec la décomposition de Dantzig-Wolfe et l'algo. de génération de col.

On a l'identité suivante :

$$cred + \mu a + \eta = \left(\min_{\chi_i \in X} c\chi_i - \mu A\chi_i - \eta\right) + \mu a + \eta = \theta(\mu)$$

A une itération *t* de l'algorithme de génération de colonnes, on a

l'encadrement $\mu a + \eta \geq valeur\ de\ (ML) \geq cred + \mu a + \eta$

L'encadrement peut donc s'écrire :

$$\boxed{\mu a + \eta \geq valeur\ de\ (ML) \geq \theta(\mu)}$$

La suite des $\theta(\mu)$ n'est forcément croissante au fil des itérations de l'algorithme de génération de colonnes.

Si on note $\theta(\widehat{\boldsymbol{\mu}})$ le maximum des $\theta(\mu)$ obtenus des itérations de 0 à t

On a l'encadrement

$$\boxed{\mu a + \eta \geq valeur\ de\ (ML) \geq \theta(\widehat{\boldsymbol{\mu}})}$$

Ecrivons (D_{ML}) le dual de (ML)

$$\max_{\mu \geq 0, \eta} \mu a + \eta \; s.c. \{ \mu A \chi_i + \eta \leq c \chi_i \quad pour \; i = 1, \dots, I$$

Linéarisons le dual lagrangien (D) de (P) en rajoutant une variable z

$$\max_{\mu \geq 0, z} z \;\; s.c. \{ z \leq c \chi_i - \mu A \chi_i + \mu a \quad pour \; i = 1, \dots, I$$

On constate que les deux problèmes sont les mêmes en faisant le changement de variable $\mathrm{z} = \boldsymbol{\mu} a + \eta$

Conclusion:
la valeur de (D) dual lagrangien de (P) = valeur du dual de (ML) = valeur de (ML)

Décomposition alternative

Réécriture condensée de (P)

On garde l'**objectif** + les **contraintes couplantes**

les **contraintes bloc-diagonales** sont prises en compte dans les X^k

On décompose le vecteur $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^K \end{pmatrix}$

$$\min_x \sum_1^K \boldsymbol{c^k x^k}$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \sum_{k=1}^K \boldsymbol{A^k x^k} \geq \boldsymbol{a} \\ x^k \in X^k \subset Z^{m_k} \quad k = 1, \dots, K \end{cases}$$

Hypothèse: X^k a un nombre fini de points pour chaque k=1,…,K

$$|X^k| = n_k \quad k = 1, \dots, K$$

Le problème (P) se réécrit en fonction de λ

Problème (M)

$$\min_{\lambda} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \left(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{k}} \chi_i^k\right) \; s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}} \chi_i^k\right) \geq \boldsymbol{a} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k = 1 \qquad k = 1, \dots, K \;\; (convexités) \\ \lambda_i^k \in \{0,1\} \quad k = 1, \dots, K \;\; i = 1, \dots, n_k \end{cases}$$

On a posé $x^k = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \chi_i^k$ avec $\chi_i^k \in X^k \;\; k = 1, \dots, K$
Les K contraintes de convexité pour choisir un $\chi_i^k \in X^k \;\; k = 1, \dots, K$

(M) ⇔ (P)

Relaxation continue du problème (M)

Problème (ML)

$$\min_{\lambda} \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{c^k} \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \chi_i^k \quad s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{A^k} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n_k}} \lambda_i^k \chi_i^k \geq \boldsymbol{a} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k = 1 \qquad k = 1, \dots, K \;\; (convexités) \\ \lambda_i^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \;\; i = 1, \dots, n_k \end{cases}$$

Relaxation

Relaxation continue du problème (M)

Problème (ML)

$$\min \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{c^k} \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \chi_i^k \quad s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{A^k} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n_k}} \lambda_i^k \chi_i^k \geq \boldsymbol{a} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k = 1 \qquad k = 1, \dots, K \quad (convexités) \\ \lambda_i^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \quad i = 1, \dots, n_k \end{cases}$$

Relaxation

Posons $x^k = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \chi_i^k \quad k = 1, \dots, K$

Relaxation continue du problème (M)

Problème (ML) : on a posé $x^k = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \chi_i^k \quad k = 1, \dots, K$

$$\min_x \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{c^k x^k} \;\; s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{A^k x^k \geq a} \\ x^k \in Conv\left(X^k\right) \qquad k = 1, \dots, K \end{cases}$$

Avec $X^k = \{x^k \in Z^{m_k} \colon B^k x^k \geq b^k\}$

Relaxation continue du problème (M)

Problème (ML)

$$\min_x \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{c^k x^k} \ \ s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{A^k x^k \geq a} & \\ x^k \in Conv(X^k) & k = 1, \dots, K \end{cases}$$

Avec $X^k = \{x^k \in Z^{m_k}\colon B^k x^k \geq b^k\}$

Ici on minimise sur $x=(x^1, \dots, x^K) \in$ Conv(X^1) $\times \ldots \times$ Conv(X^K)

Or Conv(X^1) $\times \ldots \times$ Conv(X^K) $=$ Conv($X^1 \times \ldots \times X^K$)

Donc les deux décompositions sont **équivalentes**

Branch and Price

Branch-and-Price

A la fin de la résolution de (ML), on repasse en variables x : $x^* = \Sigma_i \lambda^*_i \chi^i$

Si la solution x^* est entière STOP

Sinon

- On sépare sur une variable x_j fractionnaire

- On écrit les contraintes de séparation en variables λ

- On résout les deux problèmes fils en variables λ par génération de colonnes

Branch-and-Price

(ML) résolu, si la solution optimale $x^*=\Sigma_i\lambda^*_i\,\chi^i$ est fractionnaire, on a alors recours à une procédure de type séparation et évaluation.

On ajoute des contraintes qui séparent l'ensemble des solutions réalisables en deux parties.

Soit x^*_j une coordonnée de x^* fractionnaire.

On sépare le (MLR) obtenu à la fin de la génération de col., en 2 problèmes fils:

- l'un avec la contrainte $x_j \leq \lfloor x^*_j \rfloor$,

- l'autre avec la contrainte $x_j \geq \lfloor x^*_j \rfloor +1$.

On traduit ces contraintes linéaires en les variables λ_i de (MLR) et on résout chacun des problèmes fils par génération de colonnes.

- contrainte $x_j \leq \lfloor x^*_j \rfloor \quad \rightarrow \quad \Sigma_i\lambda_i\,\chi^i{}_j \leq \lfloor x^*_j \rfloor$
- contrainte $x_j \geq \lfloor x^*_j \rfloor +1 \quad \rightarrow \quad \Sigma_i\lambda_i\,\chi^i{}_j \geq \lfloor x^*_j \rfloor +1$

Algorithme de génération de colonnes
Méthode de stabilisation

Polyèdre de (D_{ML}) et coût réduit

Les variables $\mu \geq 0$, η du problème (D_{ML}), dual de (ML), doivent satisfaire les contraintes:

$$\mu A\chi_i + \eta \leq c\chi_i \qquad \forall \chi_i \in X$$

Une contrainte de (D_{ML}) violée correspond à une variable de coût réduit < 0 .

En effet,

Contrainte *i* violée : $\mu A\chi_i + \eta > c\chi_i \leftrightarrow 0 > c\chi_i - \mu A\chi_i - \eta$
Le coût réduit de la variable λ_i (associée au point χ_i) est <0

Donc dans l'algorithme de génération de colonnes lorsque l'on trouve une variable de coût réduit <0 cela signifie que les variables duales μ, η sont en dehors du polyèdre du dual i.e. elles violent au moins une contrainte de (D_{ML}).

Rappel sur le coût réduit minimum et la fonction duale

Nous avons vu dans les chapîtres précédents que :

- La recherche d'une variable de coût réduit min. consiste à résoudre le sous-problème:

$$cred = \min_{\chi \in X} c\chi - \mu A\chi - \eta$$

- Le lien entre coût réduit et valeur de la fonction duale au point μ est le suivant:

$$cred + \mu a + \eta = \theta(\mu)$$

Donc, à partir de *cred* , on obtient facilement $\theta(\mu)$

Contrainte saturée de (D_{ML}) et fonction duale lagrangienne θ

Contraintes de (D_{ML}) , le dual de (ML), de variables μ, η

- $\mu A\chi_i + \eta \leq c\chi_i \qquad \forall \chi_i \in X$

Soit encore

- $\eta \leq \min\limits_{\chi_i \in X} c\chi_i - \mu A\chi_i$

Contrainte de (D_{ML}) saturée par μ, η

- $\eta = \min\limits_{\chi_i \in X} c\chi_i - \mu A\chi_i$

Dans ce cas l'objectif de (D_{ML}) $\mu a + \eta$ est égal à la fonction duale lagrangienne $\theta(\mu)$

- $\mu a + \eta = \mu a + \min\limits_{\chi_i \in X} c\chi_i - \mu A\chi_i = \theta(\mu)$

<u>Conclusion</u>

Contrainte de (D_{ML}) saturée par $\mu, \eta \Rightarrow \mu a + \eta = \theta(\mu)$

Méthode de stabilisation de Wentges

Motivation méthode de stabilisation
Au cours itérations de l'algo. génération de col. :
- oscillation possible des variables duales
- solutions duales multiples dues à la dégénérescence du primal

On est à une itération *t* courante de l'algorithme de génération de colonnes
Soit $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\eta}$ variables duales de l'itération courante *t*

Dans l'algorithme de génération de colonnes « normal » , on résout le sous-problème avec μ,η (recherche variable de coût minimum) .

Au lieu de résoudre le sous-problème avec μ,η ,
on va le résoudre avec une combinaison convexe de μ,η et d'un vecteur $\hat{\mu}, \widehat{\eta}$
vérifiant les contraintes de (D_{ML}) le dual de (ML).

Méthode de stabilisation de Wentges: recherche d'une variable entrante

Soit $\hat{\mu}$ = le μ qui a donné la meilleure borne inférieure $\theta(\mu)$ jusqu'à l'itération t
Soit $\widehat{\eta} = \theta(\hat{\mu}) - \hat{\mu}a$
Soit $0 \leq \alpha < 1$

1. On pose $\begin{pmatrix}\mu_{sep}\\ \eta_{sep}\end{pmatrix} = (1-\alpha)\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \widehat{\eta}\end{pmatrix}$
2. On résout le sous-problème avec $\begin{pmatrix}\mu_{sep}\\ \eta_{sep}\end{pmatrix}$: cred($\mu_{sep}$,$\eta_{sep}$)=$\min\limits_{\chi\in X} c\chi - \mu_{sep}A\chi - \eta_{sep}$
3. Si cred(μ_{sep},η_{sep})<0 , on a trouvé une variable de coût réduit<0 (avec μ_{sep}, η_{sep}), alors cette variable a un coût réduit<0 avec $\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\end{pmatrix}$ (cf. théorème 1)

   - on la rajoute à (MLR)

   Sinon on a trouvé une variable de coût réduit$\geq$0 avec μ_{sep}, η_{sep} et cette variable a peut-être un coût réduit $\geq$0 avec $\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\end{pmatrix}$ (donc peut-être pas de var. à rajouter)

   mais $\theta\left(\mu_{sep}\right)$ améliore la borne inférieure de (ML) (cf. théorème 2)

   - on pose $\hat{\mu} = \mu_{sep}, \widehat{\eta} = \theta\left(\mu_{sep}\right) - \mu_{sep}a$ (on va se rapprocher de μ)
   - on retourne en 1.

Théorème 1

μ, η variables duales de (MLR) à une itération t,
$\hat{\mu}$ = le μ qui a donné la meilleure borne inférieure θ(μ) jusqu'à l'itération t
$\hat{\eta} = \theta(\hat{\mu}) - \hat{\mu}a$

Si $\begin{pmatrix} \mu_{sep} \\ \eta_{sep} \end{pmatrix}$ ne vérifie pas les contraintes du dual de (ML)
i.e. on a trouvé une variable de coût réduit<0 calculé avec $\begin{pmatrix} \mu_{sep} \\ \eta_{sep} \end{pmatrix}$
i.e. $\exists \chi_{sep} \in X$ t.q. $\mu_{sep}\,(A\chi_{sep}) + \eta_{sep} > c\chi_{sep}$

Alors le coût réduit de cette variable calculé avec $\begin{pmatrix} \mu \\ \eta \end{pmatrix}$ est <0
i.e. $\mu(A\chi_{sep}) + \eta > c\chi_{sep}$
Et le coût réduit est même au moins $(1-\alpha)^{-1}$ fois plus négatif c'est-à-dire
$c\chi_{sep} - \mu_{sep}\,(A\chi_{sep}) - \eta_{sep} \geq (1-\alpha)\big(c\chi_{sep} - \mu(A\chi_{sep}) - \eta\big)$

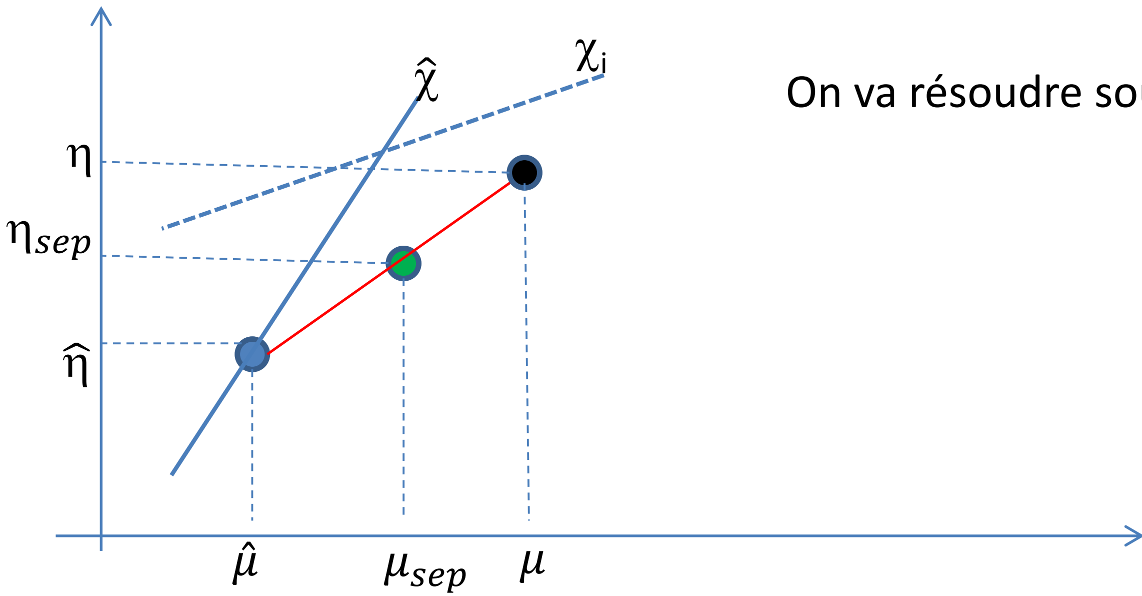
Théorème 2

μ, η variables duales de (MLR) à une itération t,
$\hat{\mu}$ = le μ qui a donné la meilleure borne inférieure $\theta(\mu)$ jusqu'à l'itération t
$\hat{\eta} = \theta(\hat{\mu}) - \hat{\mu}a$

Si $\begin{pmatrix}\mu_{sep} \\ \eta_{sep}\end{pmatrix}$ vérifie les contraintes du dual de (ML)
i.e. on ne trouve pas de variable de coût réduit<0 calculé avec $\begin{pmatrix}\mu_{sep} \\ \eta_{sep}\end{pmatrix}$
i.e. cred(μ_{sep},η_{sep})=$\min\limits_{\chi \in X}\left(c\chi - \mu_{sep}A\chi - \eta_{sep}\right) \geq 0$

Alors $\mu a + \eta \quad - \theta\left(\mu_{sep}\right) \leq \alpha\left(\mu a + \eta \quad - \theta(\hat{\mu})\right)$
i.e. avec μ_{sep} on obtient un nouvel encadrement de la valeur de (ML)
améliorant le meilleur encadrement précédent d'un facteur au moins α
La largeur de l'intervalle où se trouve la valeur de (ML) s'est resserré d'un rapport au moins α

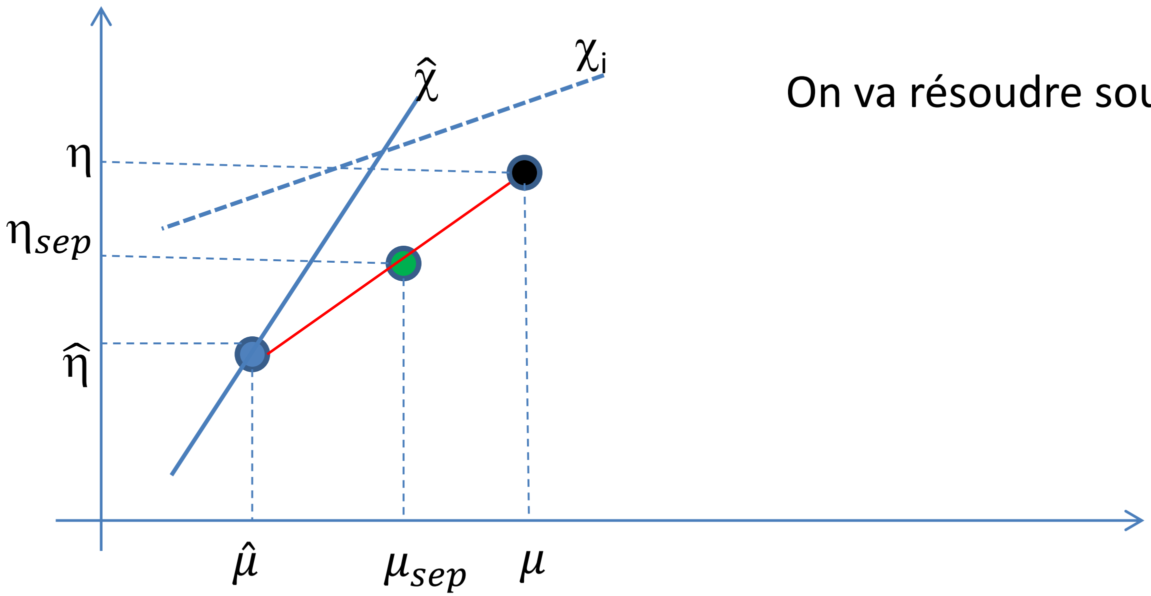
Illustration graphique du théorème 1



On va résoudre sous-pb pour μ_{sep} , η_{sep}

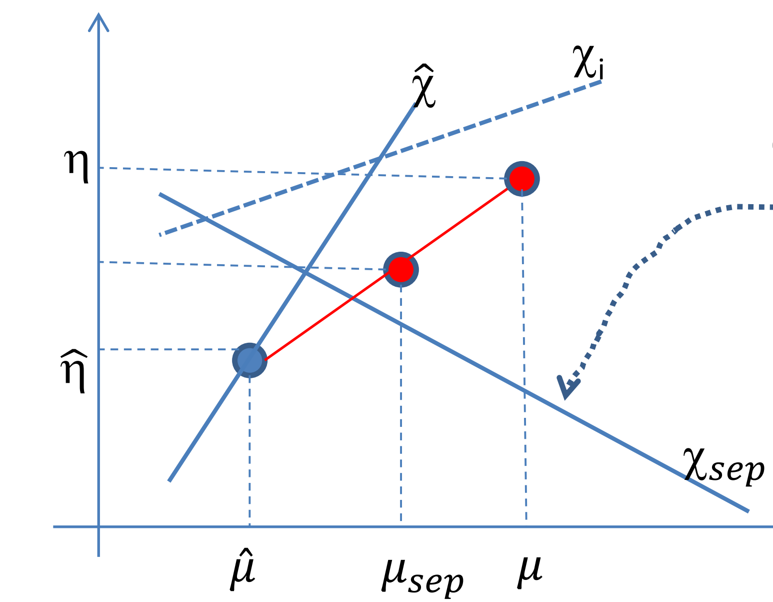
P_{DML} = polyèdre du dual de (ML)
$\mu \geq 0$, η tel que :
$\mu A \chi_i + \eta \leq c \chi_i \qquad \forall \chi_i \in X$

Illustration graphique du théorème 1



On va résoudre sous-pb pour μ_{sep} , η_{sep}

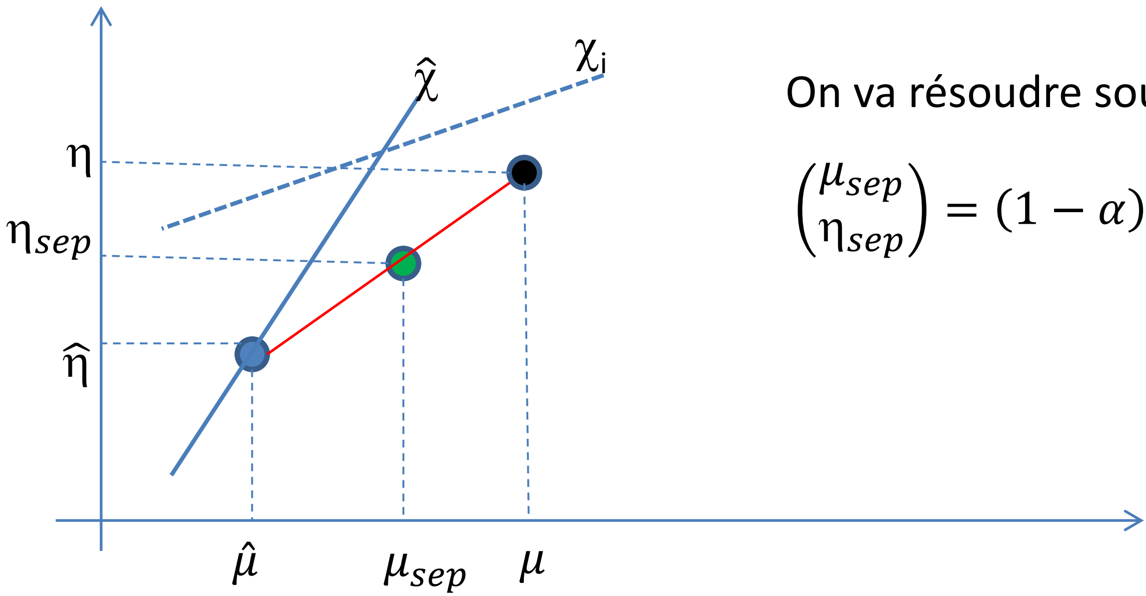
P_{DML} = polyèdre du dual de (ML)
$\mu \geq 0$, η tel que :
$\mu A \chi_i + \eta \leq c \chi_i \qquad \forall \chi_i \in X$



On a trouvé contrainte violée χ_{sep} : $\begin{pmatrix} \mu_{sep} \\ \eta_{sep} \end{pmatrix} \notin P_{DML}$

Elle est encore plus violée par μ , η

Illustration graphique du théorème 2

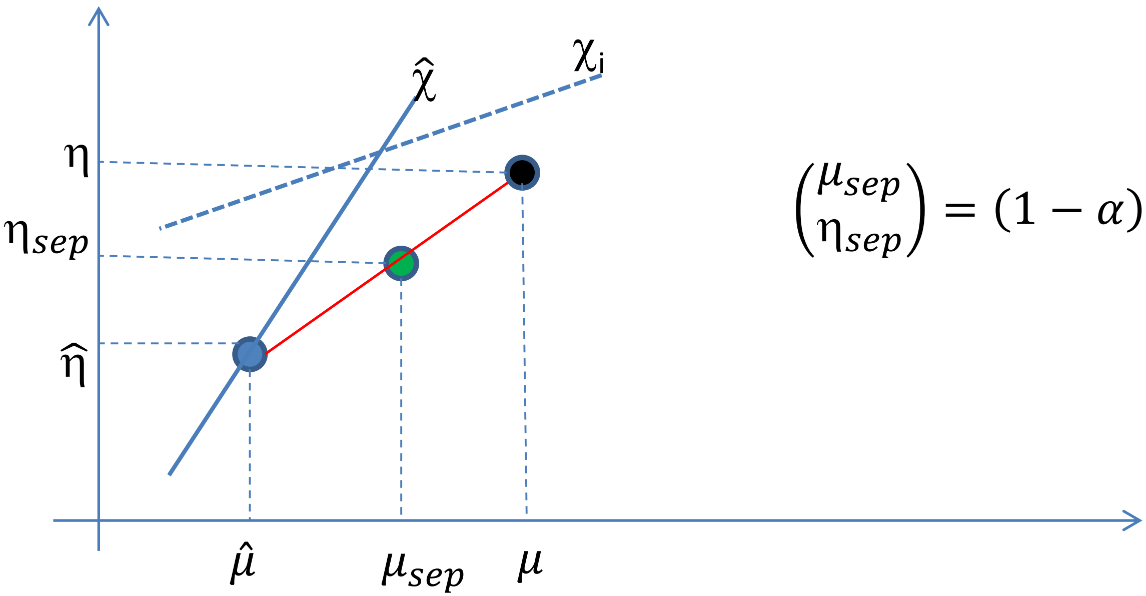


On va résoudre sous-pb pour μ_{sep} , η_{sep}

$$\begin{pmatrix}\mu_{sep}\\ \eta_{sep}\end{pmatrix} = (1-\alpha)\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\eta}\end{pmatrix}$$

P_{DML} = polyèdre du dual de (ML)
$\mu \geq 0$, η tel que :
$\mu A\chi_i + \eta \leq c\chi_i \qquad \forall \chi_i \in X$

<u>Illustration graphique du théorème 2</u>

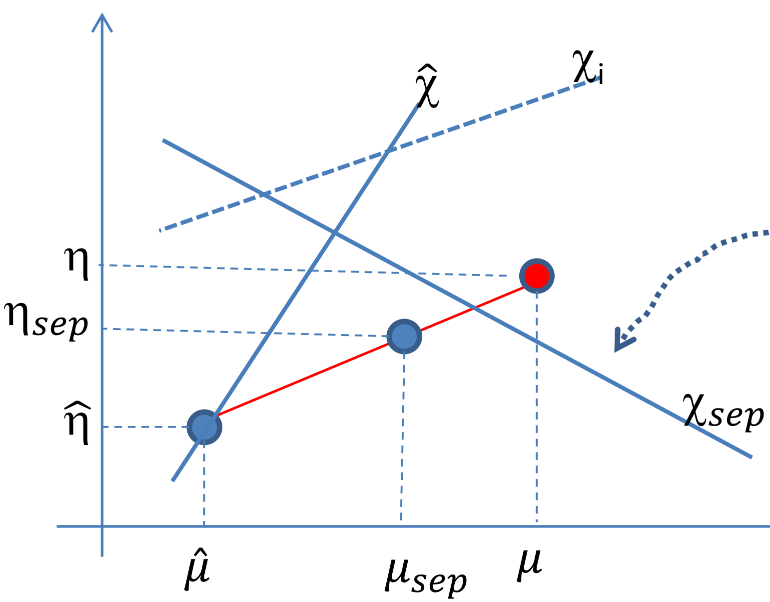


$$\begin{pmatrix}\mu_{sep}\\ \eta_{sep}\end{pmatrix} = (1-\alpha)\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\eta}\end{pmatrix}$$

P_{DML} = polyèdre du dual de (ML)

$\mu \geq 0$, η tel que :

$\mu A\chi_i + \eta \leq c\chi_i \qquad \forall \chi_i \in X$

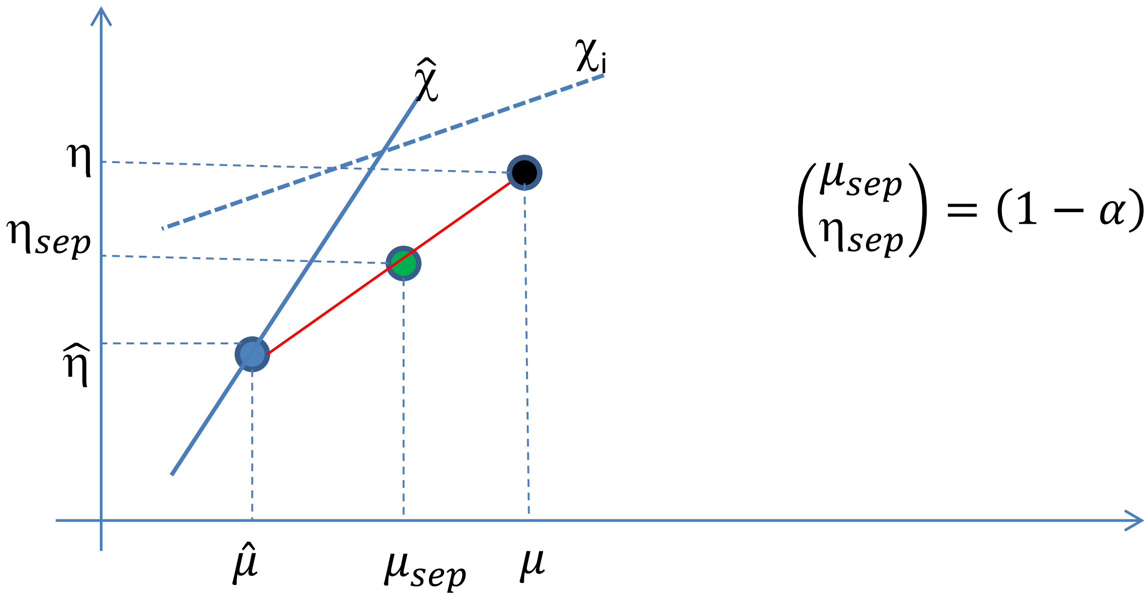


Cas du théorème 2

$\begin{pmatrix}\mu_{sep}\\ \eta_{sep}\end{pmatrix} \in P_{DML}$ $\qquad \chi_{sep} = \underset{\chi_i \in X}{\operatorname{argmin}}\left(c\chi_i - \mu_{sep} A\chi_i\right)$

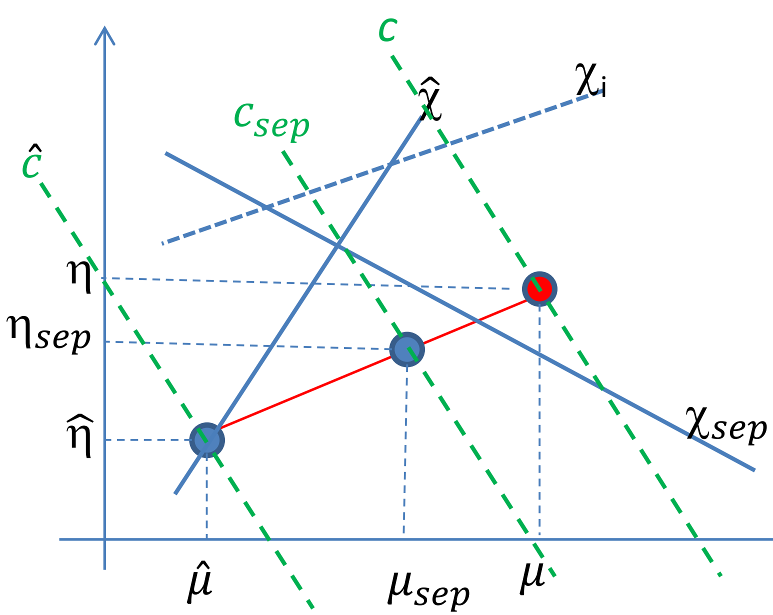
Pas de contrainte violée par μ_{sep} , η_{sep}

Illustration graphique du théorème 2



$$\begin{pmatrix}\mu_{sep}\\ \eta_{sep}\end{pmatrix} = (1-\alpha)\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\eta}\end{pmatrix}$$

P_{DML} = polyèdre du dual de (ML)
$\mu \geq 0$, η tel que :
$\mu A\chi_i + \eta \leq c\chi_i \qquad \forall \chi_i \in X$

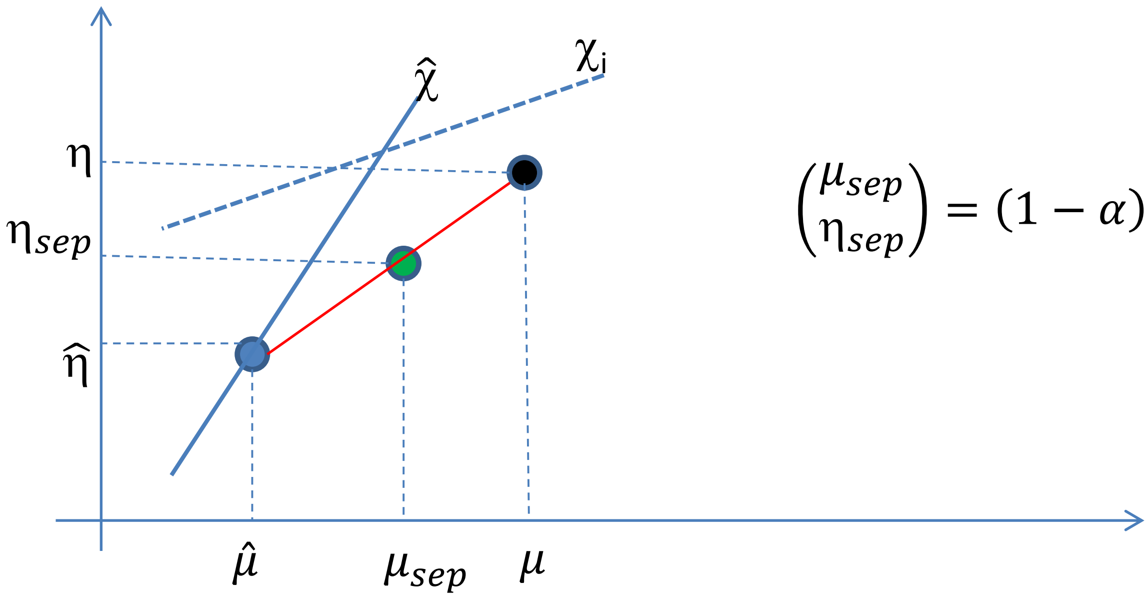


En vert, courbes niveaux μa+η=constante
3 constantes:

- $\hat{c} = \theta(\hat{\mu})$
- $c_{sep} = \mu_{sep} a + \eta_{\ sep}$
- $c = \mu a + \eta$

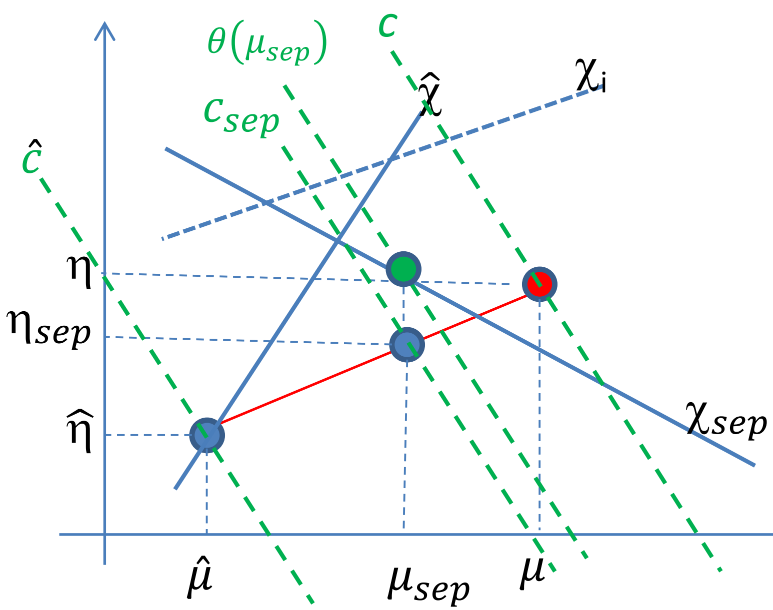
On a : $c - c_{sep} = \alpha(c - \hat{c})$

Illustration graphique du théorème 2



$$\begin{pmatrix}\mu_{sep}\\ \eta_{sep}\end{pmatrix} = (1-\alpha)\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\eta}\end{pmatrix}$$

P_{DML} = polyèdre du dual de (ML)
$\mu \geq 0$, η tel que :
$\mu A \chi_i + \eta \leq c\chi_i \qquad \forall \chi_i \in X$



En vert, courbes niveaux μa+η=constante
3 constantes:

- $\hat{c} = \theta(\hat{\mu})$
- $c_{sep} = \mu_{sep} a + \eta_{\ sep} \leq \theta(\mu_{sep})$ **on monte $\eta_{\ sep}$ jusqu'à saturer la contrainte induite par χ_{sep}**
- $c = \mu a + \eta$

On a : $c - c_{sep} = \alpha(c - \hat{c})$
D'où : $c - \theta(\mu_{sep}) \leq \alpha(c - \hat{c})$

Démonstration du théorème 1

0> $c\chi_{sep} - \mu_{sep}\left(A\chi_{sep}\right) - \eta_{sep}$ on remplace μ_{sep} , η_{sep}

= $c\chi_{sep} - ((1-\alpha)\mu + \alpha\hat{\mu})\left(A\chi_{sep}\right) - ((1-\alpha)\eta + \alpha\hat{\eta})$ on regroupe les termes

= $(1-\alpha)\left(c\chi_{sep} - \mu\left(A\chi_{sep}\right) - \eta\right) + \alpha\left(c\chi_{sep} - \hat{\mu}\left(A\chi_{sep}\right) - \hat{\eta}\right)$

Comme $\hat{\eta} = \theta(\hat{\mu}) - \hat{\mu}a = \min_{\chi \in X} c\chi - \hat{\mu}(A\chi)$, la parenthèse que multiplie α est ≥ 0

Et finalement

0>$c\chi_{sep} - \mu_{sep}\left(A\chi_{sep}\right) - \eta_{sep} \geq (1\text{-}\alpha)\left(c\chi_{sep} - \mu\left(A\chi_{sep}\right) - \eta\right)$

Démonstration du théorème 2

$$\left.\begin{array}{ll} \mu a + \eta & \times(1-\alpha) \\ \\ \hat{\mu} a + \hat{\eta} & \times\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (1-\alpha)(\mu a + \eta) + \alpha(\hat{\mu} a + \hat{\eta}) = \mu_{sep} a + \eta_{sep}$$

$$\min_{\chi \in X}\left(c\chi - \mu_{sep} A\chi - \eta_{sep}\right) \geq 0 \leftrightarrow \min_{\chi \in X}\left(c\chi - \mu_{sep} A\chi - \eta_{sep}\right) + \mu_{sep} a \geq \mu_{sep} a$$

$$\leftrightarrow \theta(\mu_{sep}) - \eta_{sep} \geq \mu_{sep} a$$

D'où $(1-\alpha)(\mu a + \eta) + \alpha(\hat{\mu} a + \hat{\eta}) \leq \theta(\mu_{sep})$

$\hat{\mu} a + \hat{\eta} = \theta(\hat{\mu})$ par définition de $\hat{\eta}$

D'où $(1-\alpha)(\mu a + \eta) + \alpha\, \theta(\hat{\mu}) \leq \theta(\mu_{sep})$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu a + \eta - \theta(\mu_{sep})}_{\text{nouvel encadrement}} \leq \alpha(\underbrace{\mu a + \eta - \theta(\hat{\mu})}_{\text{ancien encadrement}})$$

Tests sur Generalized Assignment Problem – Bibliothèque de jeux d'essais

GAP clusters-clients	(M) optimum	LP relaxation continue	(ML) Gén col normale 1000 col.	(ML) Gén col Wentges 1000 col.
B 05-100	1843	1831,33	UB=2028.2 LB=1663.63	UB=1839.47 LB=1837.65
C 05-100	1931	1923.98	UB=2105.09 LB=1755.27	UB=1930.66 LB=1928.33

Pour un même nombre d'itérations (1000), on constate que l'encadrement de la valeur de (ML) obtenu par la méthode de Wentges est beaucoup plus serré que celui obtenu par la méthode « normale »

Références

Wolsey, L. A. (1998) Integer Programming, John Wiley & Sons, New York

Pessoa A., Sadykov R., Uchoa E., Vanderbeck F. (2013)
In-Out separation and column generation stabilization by dual price smoothing
INRIA research report hal-00750412

Annexes

- Décomposition avec sous-problèmes identiques

Décomposition alternative avec sous-problèmes identiques

Cas des sous-problèmes identiques

$$c^k = c^{(0)}, A^k = A^{(0)}, B^k = B^{(0)}, b^k = b^{(0)} \quad \forall k = 1, \dots, K$$

Problème (ML)

$$\min \boldsymbol{c}^{(0)} \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \ s.c. \begin{cases} \boldsymbol{A}^{(0)} \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \geq \boldsymbol{a} \\ x^k \in Conv(X^k) \qquad k = 1, \dots, K \end{cases}$$

Avec $X^k = \{x^k \in Z^{m_k} : Bx^k \geq b\}$

Cas des sous-problèmes identiques

$$c^k = c^{(0)}, A^k = A^{(0)}, B^k = B^{(0)}, b^k = b^{(0)} \quad \forall k = 1, \dots, K$$

Problème (ML)

$$\min \boldsymbol{c}^{(0)} \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{x}^k \; s.c. \begin{cases} \boldsymbol{A}^{(0)} \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{x}^k \geq \boldsymbol{a} \\ x^k \in Conv(X^k) \qquad k = 1, \dots, K \end{cases}$$

Avec $X^k = \{x^k \in Z^{m_k} : B^k x^k \geq b^k\}$

On pose $x = x^k$ $\forall k$ et donc $\sum_{k=1}^{K} x^k = Kx$

$x \in Conv(X^k) \leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \chi_i^k$ et $\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k = 1$

$Kx = \sum_{i=1}^{n_k} K\lambda_i^k \chi_i^k$ et $\sum_{i=1}^{n_k} K\lambda_i^k = K$

Cas des sous-problèmes identiques

$$c^k = c^{(0)}, A^k = A^{(0)}, B^k = B^{(0)}, b^k = b^{(0)} \quad \forall k = 1, \dots, K$$

Problème (ML)

$$\min_{\lambda^{(0)}} \sum_{i=1}^{n_{(0)}} \lambda_i^{(0)} \left(\boldsymbol{c}^{(\mathbf{0})} \chi_i^{(0)} \right) \qquad s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_{(0)}} \lambda_i^{(0)} \left(\boldsymbol{A}^{(\mathbf{0})} \chi_i^{(0)} \right) \geq \boldsymbol{a} \\ \sum_{i=1}^{n_{(0)}} \lambda_i^{(0)} = K \\ \lambda_i^{(0)} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n_{(0)} \end{cases}$$

Avec $\chi_i^{(0)}$ $i = 1, \dots, n_{(0)}$ l'ensemble des solutions de

$$X^{(0)} = \left\{ x \in Z^{m_{(0)}} : B^{(0)} x \geq b^{(0)} \right\}$$

Cas des sous-problèmes identiques

$$c^k = c^{(0)}, A^k = A^{(0)}, B^k = B^{(0)}, b^k = b^{(0)} \quad \forall k = 1, \dots, K$$

Problème (ML)

$$\min_{\lambda^{(0)}} \sum_{i=1}^{n_{(0)}} \lambda_i^{(0)} \left(\boldsymbol{c}^{(\mathbf{0})} \chi_i^{(0)} \right) \qquad s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_{(0)}} \lambda_i^{(0)} \left(\boldsymbol{A}^{(\mathbf{0})} \chi_i^{(0)} \right) \geq \boldsymbol{a} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n_{(0)}} \lambda_i^{(0)} = K \\ \lambda_i^{(0)} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n_{(0)} \end{cases}$$

Calcul des coûts réduits identiques à avant

LB = cred + μa + $K\eta$

FIN